□□□ 1 □□□□□□□□□□□□□

1. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的简单几何性质

(1) 范围

(2) 对称性　抛物线的对称轴叫做抛物线的轴.

(3) 顶点　抛物线和它的轴的交点叫做抛物线的顶点.

(4) 离心率　$e=1$

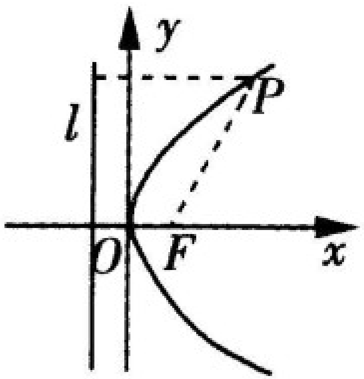
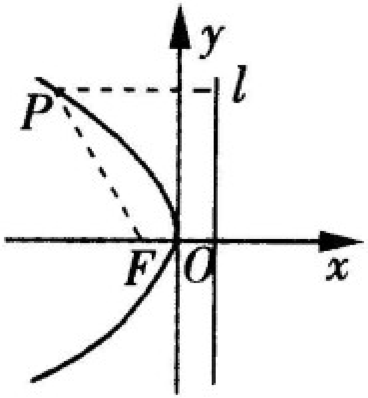
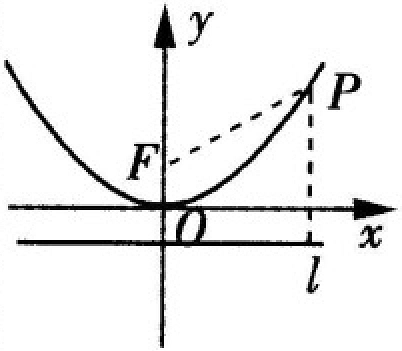
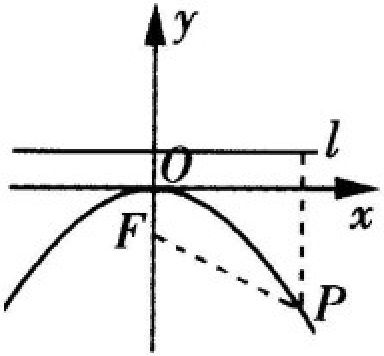
1. 四种标准方程对应的抛物线有相同的　**答案**▶A

A. 顶点　B. 焦点

C. 准线　D. 对称轴

2. 已知 $A(2,0)$，B 为抛物线 $y^2=x$ 上的一点，则 $|AB|$ 的最小值为________. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

2. 四种标准方程对应的抛物线性质的比较

标准方程		$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
图形					
几何性质	范围	$x\geqslant 0,y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant 0,y\in\mathbf{R}$	$y\geqslant 0,x\in\mathbf{R}$	$y\leqslant 0,x\in\mathbf{R}$
	对称性	关于 x 轴对称		关于 y 轴对称	
	顶点	坐标原点			
	离心率	$e=1$			

□□□ 2 □□□□□□□□□□□□

直线与抛物线有三种位置关系：相离、相切、相交.

(1)直线的斜率存在时，设直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，将 $y=kx+m$ 代入 $y^2=2px$，消去 y 并化简，得 $k^2x^2+2(mk-p)x+m^2=0$.

①当 $k=0$ 时，直线平行于抛物线的对称轴或与对称轴重合，直线与抛物线只有一个公共点.

②当 $k\neq 0$ 时，判别式 $\Delta>0\Leftrightarrow$ 直线与抛物线相交，有两个公共点；判别式 $\Delta=0\Leftrightarrow$ 直线与抛物线相切，有且只有一个公共点；判别式 $\Delta<0\Leftrightarrow$ 直线与抛物线相离，没有公共点.

(2)直线的斜率不存在时，设直线 $l:x=m$，抛物线：$y^2=2px(p>0)$. 显然，当 $m<0$ 时，直线与抛物线相离，无交点；当 $m=0$ 时，直线与抛物线相切，有一个交点；当 $m>0$ 时，直线与抛物线相交，有两个交点.

3. 已知直线 l 与抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 只有一个交点，则直线 l 与抛物线的位置关系是　　**答案**▶D

A. 相交　　　　B. 相切

C. 相离　　　　D. 相交或相切

4. 过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点，若 $y_1+y_2=6$，则 $|P_1P_2|=$　　**答案**▶C

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

□□□ 3 □□□□□□□□□□□

1. 焦点弦

① 以过焦点的弦为直径的圆和准线相切.

② $|AB|=2(x_0+\frac{p}{2})$（焦点弦长与中点坐标的关系）.

③ A,B 两点的横坐标之积、纵坐标之积为定值，即 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$.

④若直线 AB 的倾斜角为 α，则 $|AF| = \dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，$|FB| = \dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，从而 $|AB| = \dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，$\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$，$\dfrac{1}{|AF|} + \dfrac{1}{|FB|} = \dfrac{2}{p}$，$S_{\triangle OAB} = \dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$.

⑤设弦 AB 的斜率为 k，则焦点弦的斜率式为 $|AB| = 2p(1+\dfrac{1}{k^2})$.

注意 设抛物线 C 的焦点 F 在 x 轴上，过点 F 且斜率为 k（倾斜角为 α）的直线 l 交抛物线 C 于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{FB}(\lambda > 0)$，则离心率 $e = \sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|\left(|e\cos\alpha| = \left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|\right)$.

上述内容可视为焦点弦的模型，这个模型也适用于椭圆和双曲线.

2. 通径

5.（广东省仲元中学月考）如图 2.4.2 - 5，过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线依次交抛物线及准线于点 A，B，C，若 $|BC|=2|BF|$，且 $|AF|=3$，则抛物线的方程为（ D ）

A. $y^2=\frac{3}{2}x$　　B. $y^2=9x$

C. $y^2=\frac{9}{2}x$　　D. $y^2=3x$

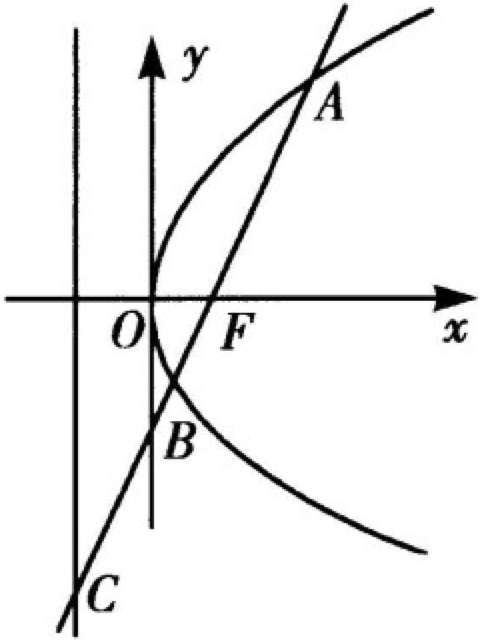


图 2.4.2 - 5

6. 过定点 $P(0,1)$ 作与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点的直线有几条？

满足条件的直线有三条

7. 若直线 $l:y=(a+1)x-1$ 与曲线 $C:y^2=ax(a\neq 0)$ 恰好有一个公共点,试求实数 a 的取值集合.

实数 a 的取值集合是 $\{-1,-\frac{4}{5}\}$

8. 求过定点 $P(-1,1)$,且与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点的直线 l 的方程. $y=1$ 或 $(\sqrt{3}-1)x-2y+\sqrt{3}+1=0$

或 $(1+\sqrt{3})x+2y+\sqrt{3}-1=0$.

9. (2015·江苏无锡月考)设点 $P(x,y)(y\geqslant 0)$ 为平面直角坐标系 xOy 内的一个动点(其中 O 为坐标原点),点 P 到定点 $M(0,\frac{1}{2})$ 的距离比点 P 到 x 轴的距离大 $\frac{1}{2}$.

(1)求点 P 的轨迹方程;

(2)若直线 $l:y=kx+1$ 与点 P 的轨迹相交于 A,B 两点,且 $|AB|=2\sqrt{6}$,求实数 k 的值.

解析▶(1)过点 P 作 x 轴的垂线且垂足为点 N,则 $|PN|=y$,由题意知 $|PM|-|PN|=\frac{1}{2}$,$\therefore \sqrt{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}=y+\frac{1}{2}$,

化简得 $x^2=2y$.

故点 P 的轨迹方程为 $x^2=2y$.

(2)由题意设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2=2y, \end{cases}$ 消去 y 化简得 $x^2-2kx-2=0$,

$\therefore x_1+x_2=2k, x_1x_2=-2.$

$\because |AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2+8}$

$=2\sqrt{6}$, $\therefore k=\pm 1.$

10. 已知抛物线 $y^2=2x$，过点 $Q(2,1)$ 作一条直线交抛物线于 A,B 两点，试求弦 AB 的中点的轨迹方程.

解析▶方法一 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，弦 AB 的中点为 $M(x,y)$，则 $y_1+y_2=2y$，

当直线 AB 的斜率存在时，$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y-1}{x-2}$.

易知 $\begin{cases} y_1^2=2x_1 & ①, \\ y_2^2=2x_2 & ②, \end{cases}$ ①－②，得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2(x_1-x_2)$，

所以 $2y\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，即 $2y\cdot\dfrac{y-1}{x-2}=2$，

即 $\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=x-\dfrac{7}{4}$.

当直线 AB 的斜率不存在，即 $AB\perp x$ 轴时，AB 的中点为 $(2,0)$，

适合上式，

故所求轨迹方程为$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=x-\frac{7}{4}$.

方法二 当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y-1=k(x-2)\ (k\neq 0)$，由$\begin{cases} y-1=k(x-2), \\ y^2=2x, \end{cases}$得$\frac{k}{2}y^2-y+1-2k=0$.

所以$\begin{cases} k\neq 0, \\ \Delta=(-1)^2-4\times\frac{k}{2}(1-2k)>0, \end{cases}$

所以 $k\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 $P(x,y)$，

则 $y_1+y_2=\frac{2}{k}, y_1y_2=\frac{2(1-2k)}{k}$.

所以 $x_1+x_2=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)=\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]=\frac{1}{2}[\frac{4}{k^2}-\frac{4(1-2k)}{k}]=\frac{2-2k+4k^2}{k^2}$.

则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1-k+2k^2}{k^2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{k}$,

消去 k 得$(y-\frac{1}{2})^2=x-\frac{7}{4}$.

当直线 AB 的斜率不存在,即 $AB\perp x$ 轴时,AB 的中点为$(2,0)$,适合上式.

故所求轨迹方程为$(y-\frac{1}{2})^2=x-\frac{7}{4}$.

1 过点 $Q(4,1)$ 作抛物线 $y^2=8x$ 的弦 AB，该弦恰被 Q 平分，求 AB 所在直线的方程.

解析▶方法一 由题意知，当 AB 垂直于 x 轴时，不满足题意，故弦 AB 所在的直线的斜率存在.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，弦 AB 所在直线的方程为 $y=k(x-4)+1(k\neq0)$.

由 $\begin{cases}y^2=8x,\\y=k(x-4)+1\end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-8y-32k+8=0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{8}{k}$.

又 $y_1+y_2=2$，所以 $\dfrac{8}{k}=2$，解得 $k=4$.

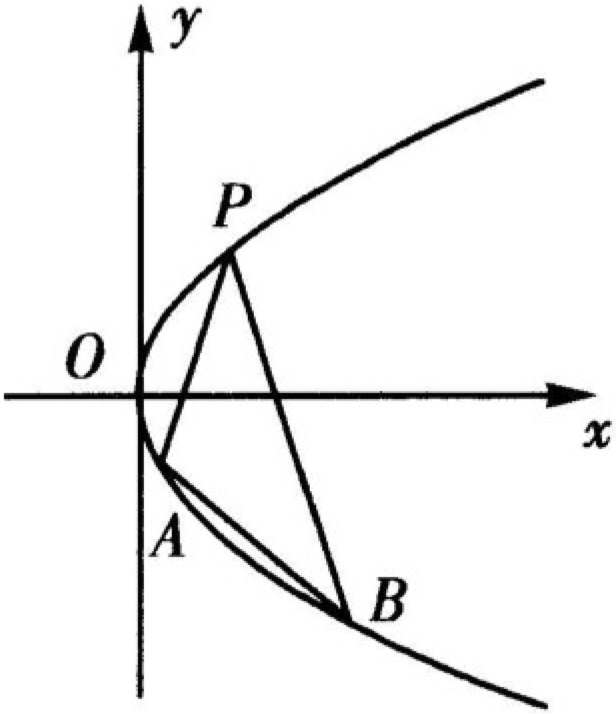
故所求弦 AB 所在直线的方程为 $4x-y-15=0$.

与抛物线有关定值(定点)问题

12. 如图 2.4.2－6 所示，抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点，点 $P(1,2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 均在抛物线上.

(1) 求抛物线的方程及其准线方程；

(2) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，证明：直线 AB 的斜率为定值.



解析▶ (1) 由题意可设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$，则由点 $P(1,2)$ 在抛物线上，得 $2^2=2p\times1$，解得 $p=2$，

故所求抛物线的方程是 $y^2=4x$，准线方程是 $x=-1$.

(2) 因为 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补，所以 $k_{PA} = -k_{PB}$，即 $\frac{y_1-2}{x_1-1} = -\frac{y_2-2}{x_2-1}$.

又 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 均在抛物线上，所以 $x_1 = \frac{y_1^2}{4}, x_2 = \frac{y_2^2}{4}$，从

而有 $\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1} = -\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$，即 $\frac{4}{y_1+2} = -\frac{4}{y_2+2}$，得 $y_1 + y_2 = -4$，故

直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{4}{y_1+y_2} = -1$.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，设点 $F(1,0)$，直线 $l:x=-1$，点 P 在直线 l 上移动，R 是线段 PF 与 y 轴的交点，$RQ\perp FP$，$PQ\perp l$.

(1)求动点 Q 的轨迹方程；

(2)记 Q 的轨迹为曲线 E，过点 F 作两条互相垂直的曲线 E 的弦 AB，CD，设 AB，CD 的中点分别为 M，N，求证：直线 MN 过定点$(3,0)$.

解析▶(1)因为点 $F(1,0)$，直线 $l:x=-1$，所以点 R 是线段 FP 的中点，由此及 $RQ\perp FP$ 知，RQ 是线段 FP 的垂直平分线.

因为 $|PQ|$ 是点 Q 到直线 l 的距离，而 $|PQ|=|QF|$，所以动点 Q 的轨迹 E 是以 F 为焦点，l 为准线的抛物线，其方程为 $y^2=4x$ $(x>0)$.

(2) 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $M(x_M,y_M)$, 直线 $AB: x=my+1(m\neq 0)$, 则 $\begin{cases} x=my+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4my-4=0$. 于是, 有 $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$, $x_M=m\cdot y_M+1=2m^2+1$, 即 $M(2m^2+1,2m)$. 同理, $N(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m})$.

因此, 直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\frac{2m+\frac{2}{m}}{(2m^2+1)-(\frac{2}{m^2}+1)}=\frac{m}{m^2-1}$, 方程为 $y-2m=\frac{m}{m^2-1}(x-2m^2-1)$, 即 $mx+(1-m^2)y-3m=0$.

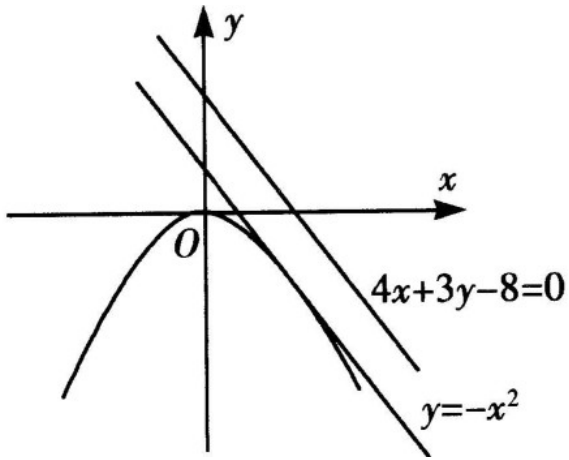
显然, 不论 m 为何值, (3,0) 均满足方程, 所以直线 MN 过定点 (3,0).

14. 求抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 的最小距离.

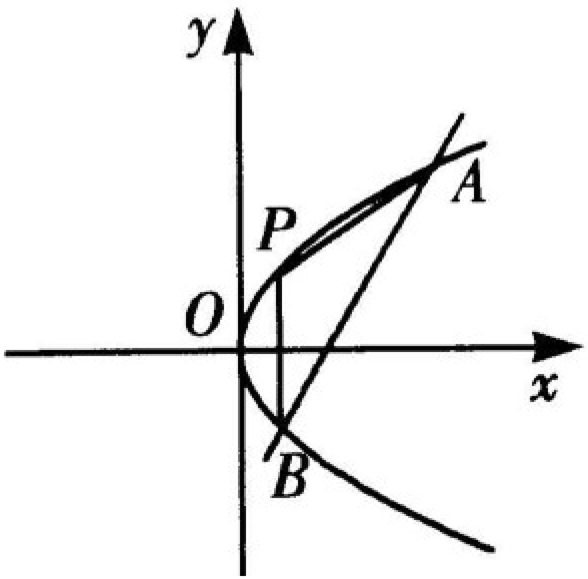
解析 ▶ **方法一** 设 $A(t,-t^2)$ 为抛物线上的点，

则点 A 到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离 $d=\frac{|4t-3t^2-8|}{5}=\frac{|3t^2-4t+8|}{5}=\frac{1}{5}|3(t-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}+8|=\frac{1}{5}|3(t-\frac{2}{3})^2+\frac{20}{3}|=\frac{3}{5}(t-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}$. $\therefore$ 当 $t=\frac{2}{3}$ 时，d 有最小值 $\frac{4}{3}$.

方法二



15. 如图 2.4.2－8，已知直线 $l: y=2x-4$ 交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B 两点，试在抛物线 AOB 这段曲线上求一点 P，使 $\triangle PAB$ 的面积最大，并求出这个最大面积.



解析▶ 由 $\begin{cases} y=2x-4, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

由图 2.4.2－8 可知，$A(4,4)$，$B(1,-2)$，

则 $|AB|=3\sqrt{5}$.

设 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线 AOB 这段曲线上一点，d 为点 P 到直线 AB 的距离，则

$$d=\frac{|2x_0-y_0-4|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{y_0^2}{2}-y_0-4\right|=\frac{1}{2\sqrt{5}}|(y_0-1)^2-9|.$$

$\because\ -2<y_0<4$，$\therefore (y_0-1)^2-9<0.$

$\therefore d=\frac{1}{2\sqrt{5}}[9-(y_0-1)^2].$

从而当 $y_0=1$ 时，$d_{\max}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$，$S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2\sqrt{5}}\times 3\sqrt{5}=\frac{27}{4}.$

因此，当点 P 的坐标为$(\frac{1}{4},1)$时，$\triangle PAB$ 的面积取得最大值，

最大值为$\frac{27}{4}$.

16. 已知抛物线 $y^2=2x$.

(1)设点 A 的坐标为$(\frac{2}{3},0)$,求抛物线上距离点 A 最近的点 P 的坐标及相应的距离 $|PA|$;

(2)设点 A 的坐标为$(a,0)$,求抛物线上的点到点 A 的距离的最小值 d,并写出 $d=f(a)$ 的函数表达式.

解析▶(1)由题意设抛物线上任一点 P 的坐标为(x,y),则

$$|PA|^2=(x-\frac{2}{3})^2+y^2=(x-\frac{2}{3})^2+2x=(x+\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}.$$

因为 $x\geqslant 0$,且在此区间上 $|PA|^2$ 随着 x 的增大而增大,所以当 $x=0$ 时,$|PA|_{min}=\frac{2}{3}$.

故距离点 A 最近的点 P 的坐标为 $(0,0)$，最短距离是 $\frac{2}{3}$.

(2) 同 (1) 求得 $d^2=(x-a)^2+y^2$

$$=(x-a)^2+2x$$

$$=[x-(a-1)]^2+(2a-1).$$

当 $a-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$ 时，$d_{\min}^2=2a-1$，

解得 $d_{\min}=\sqrt{2a-1}$，此时 $x=a-1$；

当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，$d_{\min}^2=a^2$，

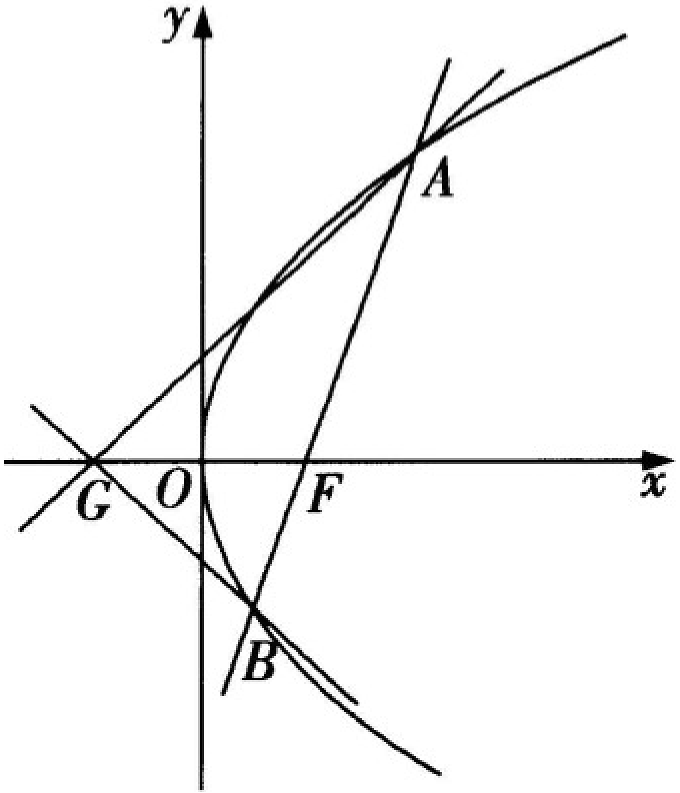
解得 $d_{\min}=|a|$，此时 $x=0$.

所以 $d=f(a)=\begin{cases}\sqrt{2a-1}, a\geqslant 1,\\ |a|, a<1.\end{cases}$

17. (2015·福建)如图 2.4.2-10,已知点 F 为抛物线 $E:y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点,点 $A(2,m)$ 在抛物线 E 上,且 $|AF|=3$.

(1)求抛物线 E 的方程;

(2)已知点 $G(-1,0)$,延长 AF 交抛物线 E 于点 B,证明:以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆,必与直线 GB 相切.



解析▶(1)由抛物线的定义得 $|AF|=2+\dfrac{p}{2}$.

由已知 $|AF|=3$,得 $2+\dfrac{p}{2}=3$,解得 $p=2$.

所以抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2)**方法一** 如图 2.4.2－10，因为点 $A(2,m)$ 在抛物线 E：$y^2=4x$ 上，所以 $m=\pm 2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设 $A(2,2\sqrt{2})$.

由 $A(2,2\sqrt{2})$，$F(1,0)$ 可得直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=2\sqrt{2}(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $2x^2-5x+2=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$，从而 $B(\frac{1}{2},-\sqrt{2})$.

又 $G(-1,0)$，

所以 $k_{GA}=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-(-1)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$k_{GB}=\frac{-\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $k_{GA}+k_{GB}=0$，从而 $\angle AGF=\angle BGF$，这表明点 F 到直线 GA，GB 的距离相等，

故以 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

方法二 如图 2.4.2－10，设以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆的半径为 r.

因为点 $A(2,m)$ 在抛物线 $E:y^2=4x$ 上，所以 $m=\pm2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设 $A(2,2\sqrt{2})$.

由 $A(2,2\sqrt{2})$，$F(1,0)$ 可得直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=2\sqrt{2}(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $2x^2-5x+2=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$，从而 $B(\frac{1}{2},-\sqrt{2})$.

又 $G(-1,0)$，故直线 GA 的方程为 $2\sqrt{2}x-3y+2\sqrt{2}=0$，

从而 $r=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

又直线 GB 的方程为 $2\sqrt{2}x+3y+2\sqrt{2}=0$，

所以点 F 到直线 GB 的距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=r$.

这表明以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

18. (2016·乙卷(全国卷Ⅰ))在直角坐标系 xOy 中，直线 $l:y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连接 ON 并延长交 C 于点 H.

(1)求 $\frac{|OH|}{|ON|}$；

(2)除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其他公共点？说明理由.

解析▶(1)由已知得 $M(0,t)$,$P(\frac{t^2}{2p},t)$.

又 N 为 M 关于点 P 的对称点,故 $N(\frac{t^2}{p},t)$,ON 的方程为 $y=\frac{p}{t}x$,代入 $y^2=2px$,整理得 $px^2-2t^2x=0$,解得 $x_1=0$,$x_2=\frac{2t^2}{p}$.

因此 $H(\frac{2t^2}{p},2t)$. 所以 N 为 OH 的中点,即 $\frac{|OH|}{|ON|}=2$.

(2)直线 MH 与 C 除 H 以外没有其他公共点. 理由如下:

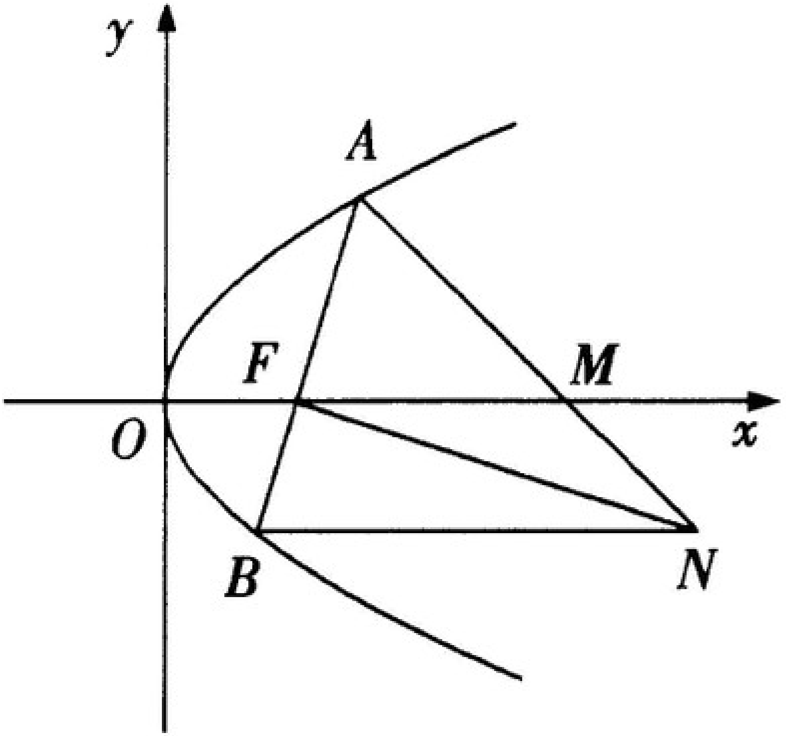
直线 MH 的方程为 $y-t=\frac{p}{2t}x$,即 $x=\frac{2t}{p}(y-t)$.

代入 $y^2=2px$ 得 $y^2-4ty+4t^2=0$,解得 $y_1=y_2=2t$,即直线 MH 与 C 只有一个公共点,所以除 H 以外直线 MH 与 C 没有其他公共点.

19. (2016 · 浙江)如图 2. 4. 2 - 13，设抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，抛物线上的点 A 到 y 轴的距离等于$|AF|-1$.

(1)求 p 的值;

(2)若直线 AF 交抛物线于另一点 B，过 B 与 x 轴平行的直线和过 F 与 AB 垂直的直线交于点 N，AN 与 x 轴交于点 M. 求 M 的横坐标的取值范围.



解析▶(1)由题意可得，抛物线上的点 A 到焦点 F 的距离等于点 A 到直线 $x=-1$ 的距离，

由抛物线的定义得 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$.

(2)由(1)得,抛物线方程为 $y^2=4x$, $F(1,0)$,可设 $A(t^2,2t)$, $t\neq0$, $t\neq\pm1$.

因为 AF 不垂直于 y 轴,可设直线 AF: $x=sy+1$ $(s\neq0)$,由

$\begin{cases}y^2=4x,\\x=sy+1\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4sy-4=0$,

故 $y_1y_2=-4$,所以 $B(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t})$.

又直线 AB 的斜率为 $\frac{2t}{t^2-1}$,故直线 FN 的斜率为 $-\frac{t^2-1}{2t}$.

从而得直线 FN: $y=-\frac{t^2-1}{2t}(x-1)$,直线 BN: $y=-\frac{2}{t}$,所以

$N(\frac{t^2+3}{t^2-1},-\frac{2}{t})$.

设 $M(m,0)$，由 A,M,N 三点共线得 $\frac{2t}{t^2-m}=\frac{2t+\frac{2}{t}}{t^2-\frac{t^2+3}{t^2-1}}$，

于是 $m=\frac{2t^2}{t^2-1}$.

所以 $m<0$ 或 $m>2$.

经检验，$m<0$ 或 $m>2$ 满足题意.

综上，点 M 的横坐标的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

20. (2016·乙卷(全国卷Ⅰ))以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 D,E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为　　**答案**▶B

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

解析▶ 由题意，不妨设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，由 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，可取 $A(\frac{4}{p},2\sqrt{2})$，$D(-\frac{p}{2},\sqrt{5})$，设 O 为坐标原点，由 $|OA|=|OD|$，得 $\frac{16}{p^2}+8=\frac{p^2}{4}+5$，得 $p=4$.

2 1. (2016·丙卷(全国卷Ⅲ))已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1,l_2 分别交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 P,Q 两点.

(1)若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 $AR/\!/FQ$；

(2)若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

解析▶ 由题知 $F(\frac{1}{2},0)$. 设 $l_1:y=a$，$l_2:y=b$，则 $ab\neq 0$，且 $A(\frac{a^2}{2},a)$，$B(\frac{b^2}{2},b)$，$P(-\frac{1}{2},a)$，$Q(-\frac{1}{2},b)$，$R(-\frac{1}{2},\frac{a+b}{2})$.

记过 A,B 两点的直线为 l，则 l 的方程为 $2x-(a+b)y+ab=0$.

(1) 由于 F 在线段 AB 上，故 $1+ab=0$.

记 AR 的斜率为 k_1，FQ 的斜率为 k_2，则

$$k_1=\frac{a-b}{1+a^2}=\frac{a-b}{a^2-ab}=\frac{1}{a}=\frac{-ab}{a}=-b=k_2.$$

所以 $AR /\!/ FQ$.

(2) 设 l 与 x 轴的交点为 $D(x_1,0)$，则 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|b-a||FD|=$

$\frac{1}{2}|b-a||x_1-\frac{1}{2}|$，$S_{\triangle PQF}=\frac{|a-b|}{2}$.

由题设可得 $|b-a||x_1-\frac{1}{2}|=\frac{|a-b|}{2}$，所以 $x_1=0$（舍去）或

$x_1=1$.

设满足条件的 AB 的中点为 $E(x,y)$.

当 AB 与 x 轴不垂直时，由 $k_{AB}=k_{DE}$ 可得 $\frac{2}{a+b}=\frac{y}{x-1}(x\neq 1)$.

而$\dfrac{a+b}{2}=y$，所以 $y^2=x-1(x\neq 1)$.

当 AB 与 x 轴垂直时，E 与 D 重合.

所以所求轨迹方程为 $y^2=x-1$.

2 (2011 · 卓越联盟自主招生)已知抛物线的顶点在原

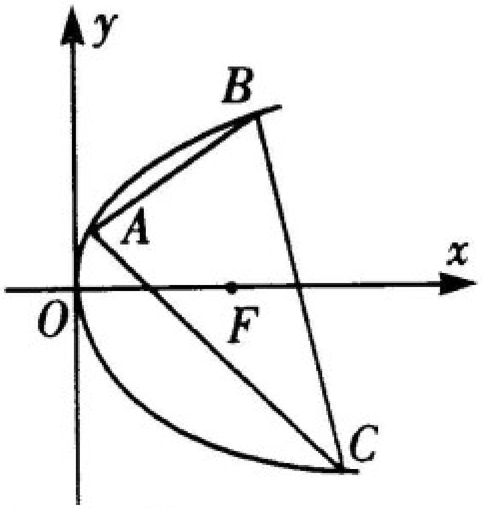
2. 点，焦点在 x 轴上，$\triangle ABC$ 三个顶点都在抛物线上，且 $\triangle ABC$ 的重心为抛物线的焦点，若 BC 边所在的直线方程为 $4x+y-20=0$，则抛物线的方程为　　　　**答案** ▶ A

A. $y^2=16x$　　　　B. $y^2=8x$

C. $y^2=-16x$　　　　D. $y^2=-8x$

解析 ▶ 易知 BC 边与 x 轴的交点为(5,0).

设抛物线的方程为 $y^2=2px$，$p>0$. 如图 2.4.2－15 所示，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



$C(x_3,y_3)$. 由 $\begin{cases}4x+y-20=0,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 y 整理

得 $8x^2-(p+80)x+200=0$,

则 $x_2+x_3=\frac{p}{8}+10, y_2+y_3=-\frac{p}{2}$.

设抛物线的焦点为 F,则 $F(\frac{p}{2},0)$,结合已知条件得

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{p}{2}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$,则 $x_1=\frac{11}{8}p-10, y_1=\frac{p}{2}$.

由 $(\frac{p}{2})^2=2p(\frac{11}{8}p-10)$,解得 $p=8$,故抛物线的方程为

$y^2=16x$.

23. (2013·华约联盟自主招生)已知 $k>0$，从直线 $y=kx$ 和 $y=-kx$ 上分别选取点 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$x_Ax_B>0$，满足 $|OA|\cdot|OB|=1+k^2$，其中 O 为坐标原点，AB 的中点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 与曲线 C 相切于两点，求证：两点在两条定直线上，并求出两条切线方程.

解析▶(1)设 $A(x_1,kx_1)$，$B(x_2,-kx_2)$，$M(x,y)$，则 $|OA|\cdot|OB|=(1+k^2)x_1x_2$ ①.

又 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$y=\frac{k}{2}(x_1-x_2)$，解得 $x_1=x+\frac{y}{k}$，$x_2=x-\frac{y}{k}$. 代入①式整理得曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{k^2}=1$.

(2)联立曲线 C 的方程 $x^2-\frac{y^2}{k^2}=1$ 和抛物线方程 $x^2=2py$,消去 x 得到 $y^2-2pk^2y+k^2=0$ ②.

由于抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 与曲线 C 相切,所以 $\Delta=4p^2k^4-4k^2=0$,所以 $p^2k^2=1$,$pk=1$,代入②式可得 $y^2-2ky+k^2=0$,$y=k$. 将 $y=k$ 代入曲线 C 的方程可得 $x=\pm\sqrt{2}$,即这两点过 $x=\pm\sqrt{2}$ 这两条定直线,故切点坐标为 $(\pm\sqrt{2},k)$. 易知切线的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{p}$,故切线方程为 $y-k=\frac{\sqrt{2}}{p}(x-\sqrt{2})$ 或 $y-k=-\frac{\sqrt{2}}{p}(x+\sqrt{2})$,化简可得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}x}{p}-\frac{1}{p}$.